2010年度 第2問

$f(x) = x^2 + ax + b$ …①

$f(x+1) = c\int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t)\,dt$ …②

①より $f'(t) = 2t + a$ であり、これを②に代入して、

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= c\int_0^1 (3x^2+4xt)(2t+a)\,dt \\
&= c\int_0^1 (4xt+3x^2)(2t+a)\,dt \\
&= c\int_0^1 \{8xt^2 + (6x^2+4ax)t + 3ax^2\}\,dt \\
&= c\left[\frac{8}{3}xt^3 + (3x^2+2ax)t^2 + 3ax^2t\right]_0^1 \\
&= c\left(\frac{8}{3}x + 3x^2 + 4x + 3ax^2\right) \\
&= 3(a+1)cx^2 + \left(2a+\frac{8}{3}\right)cx \quad \cdots ②'
\end{aligned}
$$

一方、①より

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= (x+1)^2 + a(x+1) + b \\
&= x^2 + (a+2)x + a + b + 1 \quad \cdots ①'
\end{aligned}
$$

(①′)=(②′) が恒等式であることから *1

$$3(a+1)cx^2 + \left(2a+\frac{8}{3}\right)cx$$

$$= x^2 + (a+2)x + a + b + 1.$$

$$\{3(a+1)c - 1\}x^2 + \left\{\left(2a+\frac{8}{3}\right)c - a - 2\right\}x$$

$$-a-b-1 = 0.$$

において、

$$
\begin{cases}
3(a+1)c - 1 = 0 & \cdots ③ \\
\left(2a+\frac{8}{3}\right)c - a - 2 = 0 & \cdots ④ \\
-a-b-1 = 0 & \cdots ⑤
\end{cases}
$$

が成立。

よって、$a \neq -1$ のとき *2

③より

$$c = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a+1} \quad \cdots ③'$$

④に代入し、

$$\left(2a+\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a+1}\right) - a - 2 = 0$$

両辺に $3(a+1)$ ($\neq 0$) をかけて *3

$$\left(2a+\frac{8}{3}\right) - 3(a+1)(a+2) = 0$$

$$3a^2 + 9a + 6 - 2a - \frac{8}{3} = 0$$

$3a^2 + 7a + \dfrac{10}{3} = 0$ 両辺3倍して

$$9a^2 + 21a + 10 = 0$$

よって

$$(3a+5)(3a+2) = 0$$

ゆえに $a = -\dfrac{5}{3}$ または $-\dfrac{2}{3}$ *4

(確かに $a \neq -1$)

[i] $a = -\dfrac{5}{3}$ のとき

⑤より $b = \dfrac{2}{3}$、③より $c = -\dfrac{1}{2}$

[ii] $a = -\dfrac{2}{3}$ のとき、

⑤より $b = -\dfrac{1}{3}$、③より $c = 1$.

以上より

$(a, b, c) = \left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$ または

$\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$

(ともに $a \neq -1$)

SHOT NOTE